19. Evaluate $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ where $\vec{F}=18z\vec{i}-12\vec{j}+3y\vec{k}$ and S is the part of the plane $2x+3y+6z=12$ which is located in the first quadrant.

$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ யை மதிப்பிடுக. இங்கு $\vec{F}=18z\vec{i}-12\vec{j}+3y\vec{k}$ மற்றும் S என்பது முதல் கால் பகுதியில் அமையும் $2x+3y+6z=12$ என்ற தளத்தின் புறப்பரப்பாகும்.

20. Verify Gauss's theorem for $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ taken over the region bounded by the planes $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$, $z=0$, $z=a$.

$x=a$, $y=0$, $y=a$, $z=0$, $z=a$ என்ற தளங்களால் அடைபடும் பகுதியை பொறுத்து $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ க்கு காஸின் தேற்றத்தை சரிபார்.

NOVEMBER/DECEMBER 2025

23UMA31 — VECTOR CALCULUS

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.



1. Define Vector Point Function.
   வெக்டர் புள்ளி சார்பை வரையறு.

2. Define Vector Differentiation.
   வெக்டர் வகையிடல் வரையறு.

3. Define curl of a vector point function.
   வெக்டர் புள்ளி சார்பின் சுழல் வரையறு.

4. Prove that $\nabla(\phi+\psi)=\nabla\phi+\nabla\psi$.
   $\nabla(\phi+\psi)=\nabla\phi+\nabla\psi$ என நிரூபி.

5. Prove that $\nabla\cdot(\phi\vec{u})=\nabla\phi\cdot\vec{u}+\phi\nabla\cdot\vec{v}$.
   $\nabla\cdot(\phi\vec{u})=\nabla\phi\cdot\vec{u}+\phi\nabla\cdot\vec{v}$ என நிரூபி.

6. Define laplacian operator.

லெப்லாஸின் செயலியை வரையறு.

7. Define unit normal vector $\hat{n}$.

ஓரலகு செங்குத்து வெக்டர் $\hat{n}$ யை வரையறு.

8. Define surface integral.

புறப்பரப்பு தொகையை வரையறு.

9. Using divergence theorem to show that $\iint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,dS = 3v$ where $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ and S is a closed surface enclosing volume V.

காஸின் பாய்வு தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\iint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,dS = 3v$ என நிரூபி. இங்கு $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ மற்றும் S என்பது கன அளவு V யை உள்ளடக்கிய மூடிய புறப்பரப்பு.

10. State Stoke's theorem.

ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தை எழுதுக.

(அ) $F_1 = F_1(u)$, $F_2 = F_2(u)$ மற்றும் $\frac{dF_1}{du} = W \times F_1$ மற்றும் $\frac{dF_2}{du} = W \times F_2$ எனில் $\frac{d}{du}(F_1 \times F_2) = W \times (F_1 \times F_2)$ என நிரூபி.

(ஆ) $r = a\cos wt + b\sin wt$ எனில், r யை இடப்பெயர்ச்சி வெக்டராக கொண்ட துகளின் முடுக்கமானது ஆதியை நோக்கி எப்போழுதும் இயங்கும் என நிரூபி.

17. Prove that $\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\vec{i}\,(3xz + 2xy)\vec{j} + (3xy - 2xz + 2z)\vec{k}$ is irrotational and solenoidal.

$\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\vec{i}\,(3xz + 2xy)\vec{j} + (3xy - 2xz + 2z)\vec{k}$ என்பது சுழற்சி அற்றது மற்றும் பாய்வற்றது என நிரூபி.

18. If $\vec{F} = 3xy\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\vec{k}$ then evaluate $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Where C be the curve along $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ from $t = 1$ to $t = 2$.

$\vec{F} = 3xy\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\vec{k}$ எனில் $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ யை மதிப்பிடுக. இங்கு C என்பது $t = 1$ லிருந்து $t = 2$ வரையிலான $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ என்றவைகளை பொறுத்த வளைவரை ஆகும்.

(b) Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C \left(xy + y^2\right)dx + x^2dy$ where C is the chord curve of the region bounded by $y = x$ and $y = x^2$.

$\oint_C \left(xy + y^2\right)dx + x^2dy$ என்ற சார்புக்கு கீரினின் தேற்றத்தை சரிபார். இங்கு C என்பது $y = x$ மற்றும் $y = x^2$ என்ற வளைவரைகளால் அடைபடும் வளைவரை நாண் ஆகும்.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. (a) If $F_1 = F_1(u)$, $F_2 = F_2(u)$ and if $\frac{dF_1}{du} = W \times F_1$ and $\frac{dF_2}{du} = W \times F_2$ then prove that $\frac{d}{du}(F_1 \times F_2) = W \times (F_1 \times F_2)$.

(b) If $r = a\cos wt + b\sin wt$ then show that the acceleration of a particle with displacement vector r is always directed towards the origin.



SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) Find the acceleration of the particle which moves along the curve $x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$, $z = 8t$ at any time 't'. Also find the magnitude of velocity and acceleration.

$x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$, $z = 8t$ என்ற வளைவரைகளை சுற்றி வரும் துகளின் முடுக்கத்தை ஏதேனும் ஒரு நேரம் 't' ல் காண்க. மேலும் முடுக்கத்தின் மட்டு மதிப்பைக் காண்க.

Or

(b) Find $\frac{d}{du}(A \cdot B \times C)$ if $A = 2u\vec{i} - u^2\vec{j} + u^3\vec{k}$; $B = u\vec{i} + u^2\vec{k}$ and $C = u^3\vec{j} - 2u\vec{k}$.

$A = 2u\vec{i} - u^2\vec{j} + u^3\vec{k}$; $B = u\vec{i} + u^2\vec{k}$ மற்றும் $C = u^3\vec{j} - 2u\vec{k}$ எனில் $\frac{d}{du}(A \cdot B \times C)$ யைக் காண்க.

12. (a) If $\vec{r} = x\vec{i} + yj + z\vec{k}$ and $r = |\vec{r}|$ then prove that $\nabla f(r) = f'(r)\nabla r$.

$\vec{r} = x\vec{i} + yj + z\vec{k}$ மற்றும் $r = |\vec{r}|$ எனில் $\nabla f(r) = f'(r)\nabla r$ என நிரூபி.

Or

(b) If $\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} - 3yz^2\vec{k}$ find $curl\vec{F}$ at $(1, -1, 1)$.

$\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} - 3yz^2\vec{k}$ எனில் சுழற்சி $\vec{F}$ ன் மதிப்பை $(1, -1, 1)$ ல் காண்க.

13. (a) Prove that $\nabla \times (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$.

$\nabla \times (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ என நிரூபி.

Or

(b) Show that $\nabla^2 (e^r) = e^r + \frac{2}{r} e^r$.

$\nabla^2 (e^r) = e^r + \frac{2}{r} e^r$ என நிரூபி.

14. (a) Evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ where $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ and S is the part of the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ which lies in the first octant.

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ யை மதிப்பிடுக. இங்கு $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற கோளத்தின் முதல் கால் அரை பகுதியில் அமையும் புறப்பரப்பு பகுதி ஆகும்.

Or

(b) If $\vec{F} = (2x^2 - 3z)\vec{i} - 2xy\vec{j} - 4x\vec{k}$, evaluate $\iiint_v \nabla \cdot \vec{F}\, dv$, where v is enclosed region bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and $2x + 2y + z = 4$.

$\vec{F} = (2x^2 - 3z)\vec{i} - 2xy\vec{j} - 4x\vec{k}$ எனில் $\iiint_v \nabla \cdot \vec{F}\, dv$ யைக் காண்க. இங்கு v என்பது $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ மற்றும் $2x + 2y + z = 4$ என்ற தளங்களால் அடைபடும் பகுதி ஆகும்.

15. (a) Verify Stoke's theorem for the function $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$ taken over the triangle ABC cut from the plane $3x + 2y + z = 6$ by the coordinate plane.

$3x + 2y + z = 6$ என்ற தளத்தில் இருந்து வெட்டப்பட்ட ABC யை (இணை அச்சு தளங்கள்) பொறுத்து $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$ என்ற சார்ப்புக்கு ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை சரிபார்.

Or